ведение, то множество операторов $T^{(*)}(g) = (T^{+}(g))^{-1}$ («+» — эрмитово сопряжение) образуют П. г. $D^*(G, \mathscr{H})$, к-рое наз. сопряжённым к $D(G, \mathscr{H})$. Пусть теперь все операторы П. г. $D(G, \mathscr{H})$ унитарны. Тогда $D^*(G, \mathscr{H})$ будет совпадать с $D(G, \mathscr{H})$, и скалярное произведение инвариантно относительно D, т. е. для любых h_1, h_2 из $\mathscr{H}$ и любого $T(g)$: $(T(g)h_1, T(g)h_2) = (h_1 h_2)$. Такое П. г. наз. унитарным. Всякое П. г., сохраняющее невырожденную билинейную форму, вполне приводимо, в частности вполне приводимо всякое конечномерное унитарное П. г.

П. г. $D(G, V)$ наз. циклическим, если существует вектор $v \in V$ [наз. циклическим вектором для $D(G, V)$], такой, что замыкание линейной оболочки всех $T(g)v$ совпадает с V. Каждое унитарное П. г. является прямой суммой циклич. подпредставлений. Унитарное П. г. $D(G, \mathscr{H})$ неприводимо тогда и только тогда, когда каждый ненулевой вектор $h \in \mathscr{H}$ цикличен для $D(G, \mathscr{H})$.

В приложениях приходится оперировать такими П. г., для к-рых процесс выделения инвариантных подпространств бесконечен. В этом случае используют обобщение понятия прямой суммы П. г. — прямой интеграл представлений.

Пусть $d\mu(g)$ — право(лево)инвариантная мера Хаара на локально компактной группе G (см. *Инвариантное интегрирование*). Рассмотрим пространство L^2 числовых (вещественных или комплексных) ф-ций $f(g)$, интегрируемых с квадратом по этой мере. Обозначим $T^R(g)$, $(T^L(g))$ операторы преобразования в L^2, порождённые правым (левым) сдвигом на элемент: $T^R(g)f(g') = f(g'g)$, $T^L(g)f(g) = f(g^{-1}g')$. Группа операторов $T^R(g)$, $T^L(g)$ образует линейное П. г. G в пространстве L^2, к-рое наз. правым (левым) регулярным П. г. Снабдив пространство L^2 скалярным произведением $(f_1, f_2) = \int\limits_G \overline{f_1(g)} f_2(g) d\mu(g)$, где черта означает комплексное сопряжение, можно показать, что регулярные представления унитарны.

При нахождении неприводимых представлений некомпактных (локально компактных) групп весьма эффективной оказывается теория индуцированных П. г. Индуцированное П. г. $D(K, V)\uparrow G$ локально компактной группы G специальным образом конструируется из представления $D(K, V)$ замкнутой подгруппы $K \in G$. Пусть φ — ф-ция, отображающая G в V и удовлетворяющая условию: $\varphi(kg) = T(k)\varphi(g)$ для любых $g \in G$, $k \in K$, $T(k)$ — оператор П. г. $D(K, V)$. Тогда индуциров. представление $U(G, \mathscr{H}) = D(K, V)\uparrow G$ определяется в пространстве $\mathscr{H}$ всех таких ф-ций ф-лой $(U(g)\varphi)(g') = \varphi(g'g)$. Метод индуциров. представлений является простейшим приёмом построения представлений более сложных групп из представлений более простых групп.

В квантовой механике используют т. н. проективные П. г., когда каждому элементу g ставится в соответствие оператор $T(g)$, действующий в пространстве V, причём для любых g_1 и g_2 из G: $T(g_1)T(g_2) = \omega(g_1, g_2)\, T(g_1 g_2)$, где фазовый множитель $\omega(g_1, g_2)$ — числовая ф-ция, зависящая от g_1 и g_2, а $T(e)$ — по-прежнему единичный оператор в V. На проективные П. г. непосредственно переносятся понятия эквивалентности и неприводимости П. г.

Пусть $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$ — два конечномерных П. г. G, имеющие размерности n_1 и n_2. П. г. D наз. прямым (тензорным) произведением П. г. D_1 и D_2, $D = D_1 \otimes D_2$, оно имеет разность $n_1 n_2$, а каждый его элемент представляет собой матрицу $n_1 n_2 \times n_1 n_2$, являющуюся прямым (кронекеровым) произведением матрицы из $D_1(G, V_1)$ на матрицу из $D_2(G, V_2)$ (см. *Матрица*). Прямое произведение $D_1 \otimes D_2$ двух неприводимых конечномерных представлений D_1 и D_2 группы G неприводимо, если размерность представления D_1 (или D_2) равна 1, в общем случае $D_1 \otimes D_2$ вполне приводимо.

Напр., в квантовых системах с группой симметрии G собств. ф-ции ψ гамильтониана можно классифицировать по неприводимым П. г. G. Теория П. г. позволяет в этом случае установить т. н. правила отбора при рассмотрении процессов перехода из одного состояния в другое. Если процесс перехода задаётся оператором O_α, соответствующим неприводимому П. г. $D_\alpha(G, V_\alpha)$, то переход из нек-рого состояния ψ_β, соответствующего неприводимому П. г. $D_\beta(G, V_\beta)$, может осуществляться лишь в те конечные состояния ψ_γ, представление к-рых D_γ содержится в разложении прямого произведения $D_\alpha \otimes D_\beta = \sum\limits_\gamma \otimes\, m_\gamma D_\gamma$.

Матричные элементы оператора C, приводящего прямое произведение $D_1 \otimes D_2$ к блочнодиагональному виду [т. е. $C(D_1 \otimes D_2)C^{-1} = \sum\limits_\lambda \otimes\, m_\lambda D_\lambda$, где D_λ — неприводимое представление, m_λ — его кратность в прямом произведении], наз. коэффициентами Клебша — Гордана. Неприводимое П. г. G, являющейся прямым произведением групп G_1 и G_2 (см. *Группа*), есть прямое произведение их неприводимых представлений, т. е.
$D(G_1 \otimes G_2, V) = D_1(G_1, V_1) \otimes D_2(G_2, V_2)$.

Представления некоторых групп. Коммутативные группы. Любое неприводимое унитарное представление локально компактной коммутативной группы одномерно, при этом каждому элементу группы ставится в соответствие комплексное число $\exp(i\alpha)$. Любое представление коммутативной группы ограниченными операторами в гильбертовом пространстве является суммой (дискретной, если группа компактна) одномерных представлений.

Одним из наиб. завершённых разделов общей теории П. г. является теория представлений компактных групп, к к-рым относятся все конечные группы, группы вращений плоскости и пространства, группы $SU(N)$ при различных N, рассматриваемые в теории элементарных частиц (см. *Калибровочные поля*, *Унитарная симметрия*), и т. д. Если группа компактна, то любому её представлению можно сопоставить эквивалентное ему унитарное представление, т. е. изучение представлений компактной группы сводится к изучению её унитарных представлений. Свойства унитарного представления полностью определяются свойствами его неприводимых компонент. Всякое неприводимое унитарное представление компактной группы конечномерно.

Если $D_1(G, \mathscr{H}_1)$ и $D_2(G, \mathscr{H}_2)$ — любые два неприводимых унитарных представления компактной группы G, то матричные элементы операторов этих представлений $T^{(1)}_{ik}(g)$ и $T^{(2)}_{lm}(g)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int\limits_G T^{(1)}_{ik}(g)\overline{T^{(2)}_{lm}}(g)\,d\mu(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } D_1 \text{ и } D_2 \text{ не эквивалентны}, \\ \delta_{il}\delta_{km}/d_1, & \text{если } D_1 \sim D_2, \end{cases}$$

где $d_1 = \dim D_1$; черта означает комплексное сопряжение. Считается, что базисы в пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ ортонормированы.

Пусть $\{D^\alpha(G)\}$ — система всех неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G. Ф-ции $d_\alpha^{1/2} T^\alpha_{ik}(g)$ $(i, k = 1, \ldots, d_\alpha)$, где $d_\alpha = \dim D^\alpha$, образуют полный ортонормиров. базис в пространстве L^2 (теорема Петера — Вейля).

Всякое неприводимое унитарное представление компактной группы эквивалентно подпредставлению её правого регулярного представления $D^R(G)$.